Limite d'une fonction

Dans tout ce chapitre, $I, J\dots$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition (Intérieur et adhérence d'un intervalle)

- On appellera *intérieur de* I et on notera $\overset{\circ}{I}$ l'intervalle I privé de ses bornes. Par exemple, $\overset{\circ}{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+^\times$ et $\overset{\circ}{\overline{[0,1[}} =]0,1[$.
- On appellera *adhérence de* I et on notera $\bar{I}$ l'intervalle I augmenté de ses bornes, qui éventuellement ne lui appartiennent pas. Par exemple, $\overline{[0,1[} = [0,1]$ et $\overline{]0,\infty[} = [0,\infty]$.

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in \bar{I}$. On dit que f vérife une certaine propriété $\mathcal{P}$ *au voisinage de* a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{V} \cap I$. Par exemple, la fonction sinus est croissante au voisinage de 0 ; la fonction cosinus est minorée par $\frac{1}{2}$ et majorée par 1 au voisinage de 0.

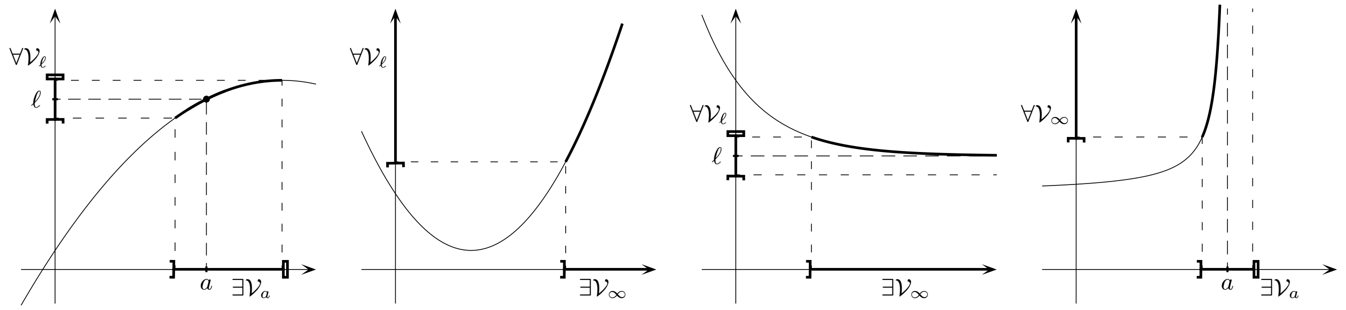
1 Définitions de la limite d'une fonction

1.1 Limite d'une fonction en un point

Définition (Limite d'une fonction en un point) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On dit que f *admet* ℓ *pour limite en* a si :

pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que : $\forall x \in \mathcal{V}_a \cap I, \quad f(x) \in \mathcal{V}_\ell$.

✌ ✌ ✌ **Explication** Si vous avez bien compris la définition de la limite d'une suite, vous devriez à présent comprendre la définition de la limite d'une fonction. Avec les suites, on demandait que pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de la limite ℓ, tous les termes à partir d'un certain rang soient piégés dans $\mathcal{V}_\ell$. A présent, avec les fonctions, on demande que toutes les valeurs que la fonction f considérée prend au voisinage de a soient piégées dans $\mathcal{V}_\ell$.



$\lim_a f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$	$\lim_\infty f = \infty$	$\lim_\infty f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$	$\lim_a f = \infty$ avec $a \in \mathbb{R}$

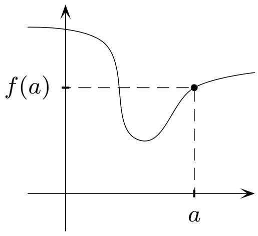
Théorème (Unicité de la limite) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in \bar{I}$.

(i) Si f possède une limite en a, celle-ci est unique, notée $\lim_a f$ ou $\lim_{x\to a} f(x)$.

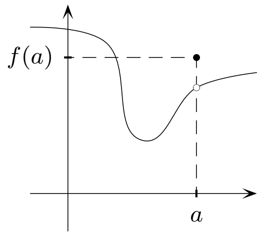
Pour tout $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, la relation $\lim_a f = \ell$ se note souvent $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

(ii) **<u>Si</u>** <u>$a \in I$</u> et si f possède une limite en a, alors $\lim_a f = f(a)$.

Explication
On peut comprendre l'assertion (ii) de ce théorème au moyen de deux petits dessins très simples.



f est définie en a
et $\lim\limits_{a} f = f(a)$.



f est définie en a
mais $\lim\limits_{a} f$ n'existe pas.

Pourtant nous verrons
que $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f$.

Démonstration

(i) Raisonnons par l'absurde et faisons l'hypothèse que f possède deux limites ℓ et ℓ' **distinctes**. Parce que $\ell \neq \ell'$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ et un voisinage $\mathcal{V}_{\ell'}$ de ℓ' tels que $\mathcal{V}_\ell \cap \mathcal{V}_{\ell'} = \varnothing$. Or par hypothèse sur f, il existe deux voisinages $\mathcal{V}_a$ et $\mathcal{V}'_a$ de a tels que :

$$\forall x \in \mathcal{V}_a \cap I, \quad f(x) \in \mathcal{V}_\ell \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathcal{V}'_a \cap I, \quad f(x) \in \mathcal{V}_{\ell'}.$$

Finalement, donnons-nous $x \in \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}'_a \cap I$ — cet ensemble est non vide. Alors $f(x) \in \mathcal{V}_\ell \cap \mathcal{V}_{\ell'}$, ce qui contredit comme voulu notre choix de $\mathcal{V}_\ell$ et $\mathcal{V}_{\ell'}$.

(ii) Faisons l'hypothèse que f est définie en a — i.e. $a \in I$ — et possède une limite ℓ en a.
Peut-on avoir alors $\ell = \infty$? Si c'était le cas, il existerait donc un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que $f(x) \in \left]f(a), \infty\right[$ pour tout $x \in \mathcal{V}_a$; en particulier, pour $x = a$, on aurait donc $f(a) \in \left]f(a), \infty\right[$ — contradiction. Ainsi $\ell \neq \infty$, et on pourrait montrer de même que $\ell \neq -\infty$.
Bref, $\ell \in \mathbb{R}$. Soit finalement $\varepsilon > 0$. Il existe par hypothèse un voisinage $\mathcal{V}'_a$ de a tel que $f(x) \in \left]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon\right[$ pour tout $x \in \mathcal{V}'_a \cap I$; en particulier $f(a) \in \left]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon\right[$. Nous venons donc de montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \quad \left|f(a)-\ell\right| < \varepsilon$.
Aussitôt $\ell = f(a)$ comme voulu — choisir $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, puis faire tendre n vers ∞. ■

En pratique Vous n'êtes pas obligés d'apprendre la définition générale et abstraite de la limite que nous venons de donner car elle n'est pas au programme. Nous allons cependant la reformuler de neuf façons différentes dans neuf contextes, et il est impératif que vous connaissiez, ou du moins sachiez retrouver très vite, ces neuf définitions. Des dessins tels que ceux que nous avons effectués ci-dessus pourront vous être utiles pour bien comprendre ces reformulations.

Définition (Les 9 limites) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$:**

$$\lim_{a} f = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0 / \quad \forall x \in I, \qquad |x-a| \leqslant \alpha \implies \left|f(x)-\ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

- **Cas où $\ell = \infty$ et $a = \infty$:**

$$\lim_{\infty} f = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A > 0, \quad \exists\, B > 0 / \quad \forall x \in I, \qquad x \geqslant B \implies f(x) \geqslant A.$$

- **Cas où $\ell = -\infty$ et $a = \infty$:**

$$\lim_{\infty} f = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A < 0, \quad \exists\, B > 0 / \quad \forall x \in I, \qquad x \geqslant B \implies f(x) \leqslant A.$$

- **Cas où $\ell = \infty$ et $a = -\infty$:**

$$\lim_{-\infty} f = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A > 0, \quad \exists\, B < 0 / \quad \forall x \in I, \qquad x \leqslant B \implies f(x) \geqslant A.$$

- **Cas où $\ell = -\infty$ et $a = -\infty$:**

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A < 0, \quad \exists\, B < 0 / \quad \forall x \in I, \qquad x \leqslant B \implies f(x) \leqslant A.$$

- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = \infty$:**

$$\lim_{\infty} f = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, B > 0 / \quad \forall x \in I, \qquad x \geqslant B \implies \left|f(x)-\ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = -\infty$:**

$$\lim_{-\infty} f = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, B < 0 / \quad \forall x \in I, \qquad x \leqslant B \implies \left|f(x)-\ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

- **Cas où $\ell = \infty$ et $a \in \mathbb{R}, a \notin I$:**

$$\lim_a f = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in I, \qquad |x - a| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant A.$$

- **Cas où $\ell = -\infty$ et $a \in \mathbb{R}, a \notin I$:**

$$\lim_a f = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A < 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in I, \qquad |x - a| \leqslant \alpha \implies f(x) \leqslant A.$$

✖✖✖ **Attention !** Dans ces définitions, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ ne doivent être permutés sous aucun prétexte.

Remarque On peut montrer que dans ces définitions, toutes les inégalités inégalités larges peuvent être remplacées par des inégalités strictes.

Le résultat suivant est une conséquence directe de la définition de la limite.

Théorème Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

- Si $\ell \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a} \big(f(x) - \ell\big) = 0.$
- Si $a \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{h \to 0} f(a + h) = \ell.$

Exemple $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \infty.$

En effet Soit $A > 0$. On cherche $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in]1, \infty[, \quad |x - 1| \leqslant \alpha \implies \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \geqslant A$. Or pour tout $x \in]1, \infty[$: $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \geqslant A \iff \sqrt{x-1} \leqslant \dfrac{1}{A} \iff |x - 1| \leqslant \dfrac{1}{A^2}$ car $x > 1$.
Posons $\alpha = \dfrac{1}{A^2}$. Via ce qui précède, on a bien : $\forall x \in]1, \infty[, \quad |x - 1| \leqslant \alpha \implies \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \geqslant A$ comme voulu.

Exemple $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1.$

En effet Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $B > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant B \implies \left|\dfrac{x^2}{x^2+1} - 1\right| \leqslant \varepsilon$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left|\dfrac{x^2}{x^2+1} - 1\right| \leqslant \varepsilon \iff \dfrac{1}{x^2+1} \leqslant \varepsilon \iff x^2 + 1 \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \iff x^2 \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} - 1.$
Nous pouvons en fait supposer $\varepsilon < 1$ car ce sont les valeurs voisines de 0 de ε qui nous sont utiles ici. Posons alors $B = \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}$. Via ce qui précède, on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant B \implies \left|\dfrac{x^2}{x^2+1} - 1\right| \leqslant \varepsilon$ comme voulu.

Théorème (Limite et bornitude) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$.
Si f possède une limite **finie** en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration Puisque $\ell = \lim_a f$ existe et est finie, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que :

$$\forall x \in I, \quad x \in \mathcal{V}_a \implies \big|f(x) - \ell\big| \leqslant 1.$$

En particulier : $\forall x \in I \cap \mathcal{V}_a, \quad \big|f(x)\big| \leqslant |\ell| + 1$. Ceci montre que f est bornée sur $I \cap \mathcal{V}_a$, donc que f est bornée au voisinage de a. ■

1.2 Limites d'une fonction à gauche/à droite en un point

Définition (Limite d'une fonction à gauche/à droite en un point) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

- Si f est définie au voisinage de a à gauche, on dit que f *admet ℓ pour limite à gauche en a* si $f_{\big| I\cap\ ]-\infty,a[}$ admet ℓ pour limite en a. En tant que limite, la limite de f en a à gauche, si elle existe, est unique et notée $\lim\limits_{a^-} f$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.

- Si f est définie au voisinage de a à droite, on dit que f *admet ℓ pour limite à droite en a* si $f_{\big| I\cap\ ]a,\infty[}$ admet ℓ pour limite en a. En tant que limite, la limite de f en a à droite, si elle existe, est unique et notée $\lim\limits_{a^+} f$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.

✎✎✎ **En pratique** Ces définitions sont un peu abstraites. Vous devez surtout retenir leurs reformulations « en situation ». Les voici dans le cas des limites à gauche :

- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$:** $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in I, \qquad a-\alpha \leqslant x < a \implies \big|f(x)-\ell\big| \leqslant \varepsilon.$
- **Cas où $\ell = \infty$:** $\quad \forall A > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in I, \qquad a-\alpha \leqslant x < a \implies f(x) \geqslant A.$
- **Cas où $\ell = -\infty$:** $\quad \forall A < 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in I, \qquad a-\alpha \leqslant x < a \implies f(x) \leqslant A.$

Exemple $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \qquad$ et $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty.$

En effet Montrons par exemple que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$. Soit donc $A > 0$. Nous cherchons $\alpha > 0$ tel que $\dfrac{1}{x} \geqslant A$ pour tout $x \in\ ]0, \alpha]$. Or pout tout $x \in \mathbb{R}_+^\times$: $\quad \dfrac{1}{x} \geqslant A \iff x \leqslant \dfrac{1}{A}$.
Posons finalement $\alpha = \dfrac{1}{A}$. Via ce qui précède on a bien : $\quad \forall x \in\ ]0,\alpha], \quad \dfrac{1}{x} \geqslant A \quad$ comme voulu.

Théorème (Caractérisation de la limite à l'aide des limites à gauche/à droite) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \mathring{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

$$\lim_a f = \ell \qquad \iff \qquad \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell \quad \boxed{\text{et} \quad \ell = f(a)}.$$

✖✖✖ <u>**Attention !**</u> La précision « $\ell = f(a)$ » est indispensable. On peut très bien avoir $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f$ sans que f ait une limite en a. Pour vous en convaincre, jetez un œil aux figures du haut de la page 2.

Démonstration

- Supposons d'abord que $\lim\limits_a f = \ell$. Nous avons déjà observé qu'alors $\ell = f(a)$, et il est immédiat, d'après toutes nos définitions, que $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell$.
- Réciproquement, supposons qu'on ait $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell$ et $\ell = f(a)$ — en particulier $\ell \in \mathbb{R}$. Nous voulons montrer que $\lim\limits_a f = \ell$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha^- > 0$ et $\alpha^+ > 0$ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in I, & a-\alpha^- \leqslant x < a \implies \big|f(x)-\ell\big| \leqslant \varepsilon \\ \forall x \in I, & a < x \leqslant a+\alpha^+ \implies \big|f(x)-\ell\big| \leqslant \varepsilon \end{cases}.$$

Posons enfin $\alpha = \min\left\{\alpha^-, \alpha^+\right\}$ et donnons-nous $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, i.e. $a-\alpha \leqslant x \leqslant a+\alpha$. Alors :

1) si $a-\alpha \leqslant x < a$, on a en fait $a-\alpha^- \leqslant x < a$, et donc $\big|f(x)-\ell\big| \leqslant \varepsilon$;
2) si $x = a$, $f(x) = f(a) = \ell$, donc $\big|f(x)-\ell\big| \leqslant \varepsilon$;
3) si $a < x \leqslant a+\alpha$, on a en fait $a < x \leqslant a+\alpha^+$, et donc $\big|f(x)-\ell\big| \leqslant \varepsilon$.

Du coup, dans tous les cas, $\big|f(x)-\ell\big| \leqslant \varepsilon$.

Un certain $\varepsilon > 0$ étant fixé, nous avons trouvé $\alpha > 0$ tel que : $\quad \forall x \in I, \qquad |x-a| \leqslant \alpha \implies \big|f(x)-\ell\big| \leqslant \varepsilon$.
Cela qui signifie bien que $\lim\limits_a f = \ell$. ■

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x \longmapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1-x & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Alors $\lim\limits_{0} f = 1$.

En effet Puisque f est définie au moyen de deux expressions différentes à gauche et à droite de 0, les notions de limite à gauche/à droite vont nous être utiles.
Nous savons que $\lim\limits_{x \to 0^-} (1-x) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1$, et enfin $f(0) = 1$. Le théorème précédent affirme bien, comme annoncé, que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

1.3 Limite d'une fonction en un point intérieur en lequel elle n'est pas définie

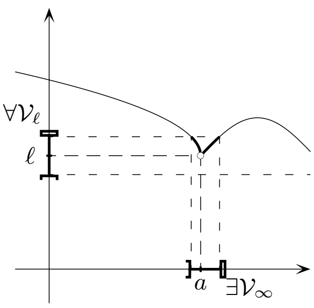
Pour toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, nous avons jusqu'ici défini $\lim\limits_{a} f$, en cas d'existence, dans le cas où $a \in \bar{I}$. Nous étendons à présent cette définition au cas où $a \in \mathring{I}$ mais où f n'est pas définie en a.

Définition (Limite d'une fonction en un point intérieur en lequel elle n'est pas définie) Soient $a \in \mathring{I}$, $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On dit que f *admet* ℓ *pour limite en* a si :

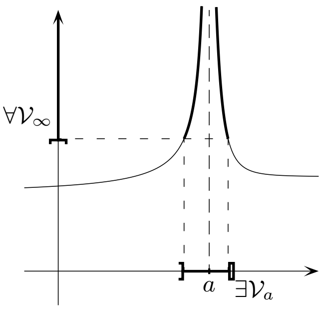
$$\text{pour tout voisinage } \mathcal{V}_\ell \text{ de } \ell, \text{ il existe un voisinage } \mathcal{V}_a \text{ de } a \text{ tel que :} \quad \forall x \in \mathcal{V}_a \cap \Big(I \setminus \{a\}\Big), \quad f(x) \in \mathcal{V}_\ell.$$

✌ ✌ ✌ **Explication**

Cette définition de la limite est la même que la première que nous avons donnée, à ceci près que les « I » y ont été remplacés par des « $I \setminus \{a\}$ ». En pratique on réécrit bien sûr cette définition avec des « $\forall \varepsilon > 0$ » ou des « $\forall A \in \mathbb{R}$ » comme on l'a fait avec nos définitions précédentes.



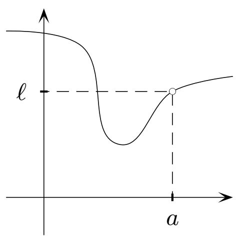
$\lim\limits_{\infty} f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$



$\lim\limits_{a} f = \infty$

Théorème (Unicité de la limite) Soient $a \in \mathring{I}$ et $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si f possède une limite en a, celle-ci est unique, notée $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
Pour tout $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, la relation $\lim\limits_{a} f = \ell$ se note souvent $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

✌ ✌ ✌ **Explication**
Comparez donc la figure ci-contre avec les deux figures analogues que nous avons déjà vues page 2.



f n'est pas définie en a mais pourtant $\lim\limits_{a} f = \ell$ existe. On voit qu'on pourrait rajouter un point en a avec la valeur $f(a) = \ell$, qui **prolongerait f en la rendant continue en** a ; nous reverrons cela bientôt.

Exemple $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

En effet Soit $A > 0$. Nous cherchons $\alpha > 0$ tel que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad |x| \leqslant \alpha \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{x^2} \geqslant A$. Or pout tout $x \in \mathbb{R}^\times$ on a : $\dfrac{1}{x^2} \geqslant A \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{A}}$. On obtient donc le résultat voulu en posant $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$.

Exemple $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (nombre dérivé de la fonction sinus en 0).

Théorème (Caractérisation de la limite à l'aide des limites à gauche/à droite) Soient $a \in \mathring{I}$, $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{a} f = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell.$$

2 Propriétés des limites de fonctions

2.1 Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

« Caractérisation *séquentielle* » signifie « caractérisation en termes de suites ».

Vous remarquerez que ce théorème contient le résultat sur les limites des suites de terme général de la forme « $f(u_n)$ ». Jusqu'ici nous utilisions ce résultat sans l'avoir démontré.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_a f = \ell$.

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans I, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.

Remarque Ce théorème est encore vrai si a est un point intérieur en lequel f n'est pas défini ; il faut cependant dans ce cas remplacer les « I » par des « $I \setminus \{a\}$ ».

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) On suppose que $\lim_a f = \ell$. Soit alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite a à valeurs dans I. Nous devons montrer que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$. Partons donc d'un voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ.
Puisque $\lim_a f = a$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que : $\quad \forall x \in I, \quad x \in \mathcal{V}_a \implies f(x) \in \mathcal{V}_\ell$.
Mais $\lim_{n\to\infty} u_n = a$. Il existe donc un rang N à partir duquel $u_n \in \mathcal{V}_a$.

Finalement, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in \mathcal{V}_a$, donc $f(u_n) \in \mathcal{V}_\ell$. Cela montre bien que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Au lieu de travailler avec des voisinages, travaillons dans le cas particulier où $a, \ell \in \mathbb{R}$ pour varier.

Raisonnons par contraposition. On suppose donc que f n'admet pas ℓ pour limite. Nous devons en déduire l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans I telle que $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admette pas ℓ pour limite. Mais puisque f n'admet pas ℓ pour limite, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists\, x \in I / \qquad |x - a| \leqslant \alpha \ \text{ et } \ \big|f(x) - \ell\big| \geqslant \varepsilon_0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, choisissons donc un élément $u_n \in I$ tel que $|u_n - a| \leqslant \frac{1}{n}$ et $\big|f(u_n) - \ell\big| \geqslant \varepsilon_0$ — poser $\alpha = \frac{1}{n}$ dans la proposition précédente. Ce procédé nous fournit bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ de limite a à valeurs dans I telle que $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admette pas ℓ pour limite. ■

Exemple Puisque $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ et $\lim_{n\to\infty} n! = \infty$, alors $\lim_{n\to\infty} e^{n!} = \infty$.

Exemple $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ n'existe pas.

En effet Posons $u_n = \dfrac{1}{n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$. Alors $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$.
Pourtant $\sin\dfrac{1}{u_n} = \sin(n\pi) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sin\dfrac{1}{v_n} = \sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Ces deux limites étant différentes, nous en déduisons le résultat annoncé via la caractérisation séquentielle de la limite.

2.2 Opérations sur les limites

Pour cette partie du cours, allez faire un tour du côté des limites de suites. Il se passe avec les fonctions la même chose qu'avec les suites pour les opérations de somme, produit, multiplication par un scalaire et inverse — en particulier, les formes indéterminées, notamment, sont les mêmes. Les résultats en question valent ici pour toutes les notions de limite que nous avons abordées.

Pour ne pas perdre de temps inutilement, nous ne nous arrêterons pas davantage sur ces points.

Théorème (Limite et composition) Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications, $a \in \bar{I}$, $b \in \bar{J}$ et $c \in \bar{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si} \quad \lim_a f = b \quad \text{et si} \quad \lim_b g = c, \quad \text{alors} \quad \lim_a g \circ f = c.$$

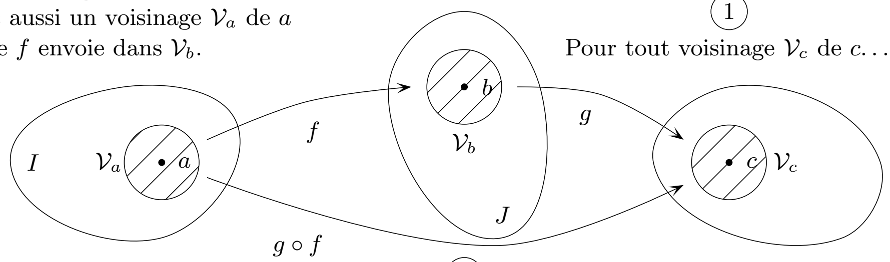
Démonstration L'idée de la preuve est résumée par la figure ci-après.
Nous voulons montrer que $\lim_a g \circ f = c$. Soit donc $\mathcal{V}_c$ un voisinage de c.
Puisque $\lim_b g = c$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_b$ de b tel que : $\quad \forall x \in J, \quad x \in \mathcal{V}_b \implies g(x) \in \mathcal{V}_c$.
Du coup, puisque $\lim_a f = b$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que : $\quad \forall x \in I, \quad x \in \mathcal{V}_a \implies f(x) \in \mathcal{V}_b$.

Il est alors évident que : $\quad \forall x \in I, \quad x \in \mathcal{V}_a \implies g \circ f(x) \in \mathcal{V}_c$. Nous avons ainsi montré comme voulu que $\lim_a g \circ f = c$. ■

2
… il existe un voisinage $\mathcal{V}_b$ de b
que g envoie dans $\mathcal{V}_c$…

3
… et donc aussi un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a
que f envoie dans $\mathcal{V}_b$.

1
Pour tout voisinage $\mathcal{V}_c$ de c…



4
Finalement $g \circ f$ envoie $\mathcal{V}_a$ dans $\mathcal{V}_c$ d'un coup d'un seul.

✎✎✎ **En pratique** Vous devez savoir appliquer parfaitement ce théorème sur la composition des limites.

Montrons par exemple que $\lim_{x \to \infty} \ln \dfrac{e^{-2x}+1}{(e^{-x}+1)^2} = 0$. Il faut pour cela savoir dans quel ordre et avec quelles fonctions élémentaires cette limite est construite. On peut, au brouillon, pour éviter de se mélanger les pinceaux, représenter les différents niveaux de composition de la façon suivante : $\left\{ \begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^\times & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x} = y & \longmapsto & \dfrac{y^2+1}{(y+1)^2} = z & \longmapsto & \ln z \end{array} \right.$. Une fois qu'on a fait ça, c'est facile, on n'a plus qu'à remarquer que $\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{y \to 0} \dfrac{y^2+1}{(y+1)^2} = 1$ et $\lim_{z \to 1} \ln z = 0$.

2.3 Passage à la limite et relation d'ordre

Théorème (Limites et inégalités larges) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications, $a \in \bar{I}$, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\lim_a f = \ell$, $\lim_a g = \ell'$ et si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, alors $\ell \leqslant \ell'$.

(ii) Si $\lim_a f = \ell$ et si $f(x) \leqslant M$ au voisinage de a, alors $\ell \leqslant M$.

(iii) Si $\lim_a f = \ell$ et si $f(x) \geqslant m$ au voisinage de a, alors $\ell \geqslant m$.

✖✖✖ **<u>Attention !</u>** Ces résultats sont faux avec des inégalités strictes : les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite. Ainsi la limite $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ n'est pas strictement positive, et pourtant : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad \dfrac{1}{x^2} > 0$.

Remarque Ce théorème est encore vrai si a est un point intérieur en lequel f n'est pas défini ; il faut cependant dans ce cas remplacer les « I » par des « $I \setminus \{a\}$ ».

Démonstration

(i) Les limites ℓ et ℓ' étant finies, nous savons que $\lim_a (g-f) = \ell' - \ell$. Pour montrer que $\ell' - \ell \geqslant 0$, raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell' - \ell < 0$. Par définition de la limite, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a pour lequel on a : $\forall x \in I, \quad x \in \mathcal{V}_a \quad \Longrightarrow \quad \Big|\big(g(x) - f(x)\big) - (\ell' - \ell)\Big| \leqslant \dfrac{\ell - \ell'}{2}$. En particulier, pour tout $x \in \mathcal{V}_a \cap I$ on a : $\quad g(x) - f(x) \leqslant (\ell' - \ell) + \dfrac{\ell - \ell'}{2} = \dfrac{\ell' - \ell}{2} < 0$.
Ceci vient contredire le fait que par hypothèse, $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a. Ainsi $\ell' - \ell \geqslant 0$ comme voulu.

(ii) et (iii) sont des cas particuliers de l'assertion (i), quand l'une des fonctions est constante. ■

Théorème (Limites et inégalités strictes) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\lim_a f = \ell$ et si $\ell < M$, alors $f(x) < M$ au voisinage de a.

(ii) Si $\lim_a f = \ell$ et si $\ell > m$, alors $f(x) > m$ au voisinage de a.

✖✖✖ **Attention !** Ces résultats sont faux avec des inégalités larges. Ainsi la limite $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}$ est négative ou nulle, et pourtant : $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad \dfrac{1}{x^2} > 0$.

Remarque Ce théorème est encore vrai si a est un point intérieur en lequel f n'est pas défini ; il faut cependant dans ce cas remplacer les « I » par des « $I \setminus \{a\}$ ».

Démonstration Contentons-nous de démontrer l'assertion (ii). Par hypothèse, puisque $\ell - m > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que : $\forall x \in I, \quad x \in \mathcal{V}_a \quad \Longrightarrow \quad \big|f(x) - \ell\big| \leqslant \dfrac{\ell - m}{2}$.
Alors pour tout $x \in \mathcal{V}_a \cap I$: $\quad f(x) \geqslant \ell - \dfrac{\ell - m}{2} = \dfrac{\ell + m}{2} > \dfrac{m + m}{2} = m$. Cela montre bien que $f(x) > m$ au voisinage de a. ■

3 Théorèmes d'existence de limites pour les fonctions

3.1 Théorème des gendarmes, théorèmes de minoration/majoration

Théorème Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $m : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $M : I \longrightarrow \mathbb{R}$ trois applications, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) **Théorème des gendarmes/de l'encadrement :** Si $\lim_a m = \lim_a M = \ell$, et si $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim_a f$ **existe** et $\lim_a f = \ell$.

(ii) **Théorème de minoration :** Si $\lim_a m = \infty$ et si $f(x) \geqslant m(x)$ au voisinage de a, alors $\lim_a f$ **existe** et $\lim_a f = \infty$.

(iii) **Théorème de majoration :** Si $\lim_a M = -\infty$ et si $f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim_a f$ **existe** et $\lim_a f = -\infty$.

Remarque Ce théorème est encore vrai si a est un point intérieur en lequel f n'est pas défini ; il faut cependant dans ce cas remplacer les « I » par des « $I \setminus \{a\}$ ».

Démonstration

(i) Par hypothèse, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a sur lequel $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur m et M, il existe deux voisinages $\mathcal{V}'_a$ et $\mathcal{V}''_a$ de a tels que :

$$\forall x \in I, \quad x \in \mathcal{V}'_a \quad \Longrightarrow \quad \big|m(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall x \in I, \quad x \in \mathcal{V}''_a \quad \Longrightarrow \quad \big|M(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon.$$

Posons $\mathcal{V}^0_a = \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}'_a \cap \mathcal{V}''_a$, qui est un voisinage de a. Alors pour tout $x \in \mathcal{V}^0_a \cap I$:

$$\ell - \varepsilon \leqslant m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x) \leqslant \ell + \varepsilon, \qquad \text{et donc } \big|f(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon.$$

Nous avons bien trouvé un voisinage $\mathcal{V}_a^0$ de a tel que : $\quad \forall x \in I, \quad x \in \mathcal{V}_a^0 \implies \big|f(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon,$ ce qui montre que $\lim\limits_a f = \ell$.

(ii) et (iii) Reprenez votre cours sur les suites et tâchez d'imiter la preuve que nous avons faite alors. ■

Le théorème des gendarmes est souvent utilisé sous l'une des deux formes suivantes, que vous démontrerez seuls :

Corollaire Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications et $a \in \bar{I}$.

- Si $\big|f(x)\big| \leqslant \varepsilon(x)$ au voisinage de a et si $\lim\limits_a \varepsilon = 0$, alors $\lim\limits_a f = 0$.
- Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim\limits_a \varepsilon = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) f(x) = 0$.

Exemple $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$ car $x \longmapsto \sin \dfrac{1}{x}$ est bornée et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

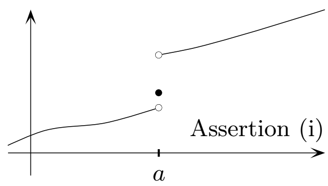
3.2 Théorème de la limite monotone

Théorème (Théorème de la limite monotone) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application **croissante**.

(i) Soit $a \in \mathring{I}$. Alors $\lim\limits_{a^-} f$ et $\lim\limits_{a^+} f$ **existent**, sont finies et vérifient : $\lim\limits_{a^-} f \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{a^+} f$.

(ii) $\lim\limits_{\inf I^+} f$ **existe**. Cette limite est finie si f est minorée ; elle vaut $-\infty$ sinon.

(iii) $\lim\limits_{\sup I^-} f$ **existe**. Cette limite est finie si f est majorée ; elle vaut ∞ sinon.

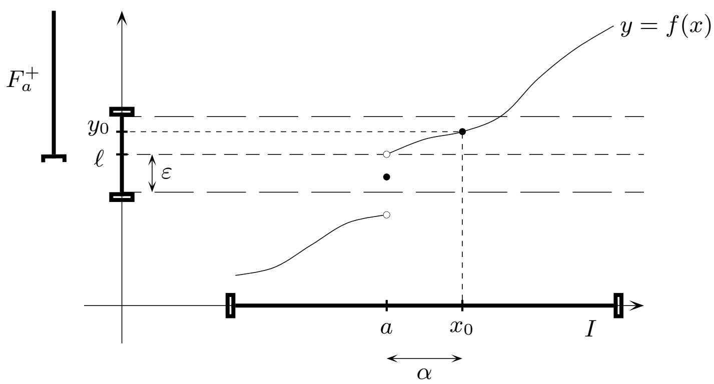


Si f est décroissante, on dispose bien entendu d'un résultat analogue.

Démonstration Montrons seulement l'assertion (i) pour ne pas perdre trop de temps. Soit $a \in \mathring{I}$. Nous allons montrer l'existence de $\lim\limits_{a^+} f$ et l'inégalité : $f(a) \leqslant \lim\limits_{a^+} f$. On procèderait de même pour la limite à gauche en a.

- Posons $F_a^+ = f\big(I \cap\,]a, \infty[\big)$. Alors F_a^+ est une partie de $\mathbb{R}$ minorée par $f(a)$, car f étant croissante :
$$\forall x \in I \cap\,]a, \infty[, \quad f(a) \leqslant f(x).$$
Comme $a \in \mathring{I}$, $F_a^+ \neq \varnothing$, et donc la propriété de la borne inférieure affirme l'existence de $\ell = \inf F_a^+ \in \mathbb{R}$.

- Montrons que $\lim\limits_{a^+} f = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque ℓ est le plus petit des minorants de F_a^+, $\ell + \varepsilon$ n'en est pas un minorant. Il existe donc $y_0 \in F_a^+$ tel que $y_0 \leqslant \ell + \varepsilon$. Considérons en outre $x_0 \in I \cap\,]a, \infty[$ tel que $y_0 = f(x_0)$.
Posons enfin $\alpha = x_0 - a > 0$. Alors pour tout $x \in I$ tel que $a < x \leqslant a + \alpha = x_0$:
$\ell - \varepsilon \leqslant \ell \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) = y_0 \leqslant \ell + \varepsilon$, car par définition $\ell = \inf F_a^+ = \inf f\big(I \cap\,]a, \infty[\big)$ et car f est croissante.
Nous venons donc de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$\forall x \in I, \quad a < x \leqslant a + \alpha \implies \big|f(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon.$$
Il est donc bien vrai que $\lim\limits_{a^+} f$ existe et vaut ℓ comme annoncé. ■



4 Extension au cas des fonctions complexes

Nous allons brièvement étendre les résultats que nous avons obtenu pour les fonctions réelles aux fonctions complexes.

✖✖✖ **Attention !** Les notions de fonction complexe majorée/minorée/monotone n'ont aucun sens car la relation d'ordre naturelle $\leqslant$ n'est pas définie sur $\mathbb{C}$.

Malgré cela, la notion de fonction bornée conserve un sens.

Définition (Fonction bornée) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. On dit que f est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$$\forall x \in I, \quad \left|f(x)\right| \leqslant K.$$

Définition (Limite d'une fonction complexe en un point) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que *f admet ℓ pour limite en a* si :

pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que : $\quad \forall x \in \mathcal{V}_a \cap I, \quad f(x) \in \mathcal{V}_\ell$.

Cela revient à dire que $\lim\limits_{x\to a} \left|f(x) - \ell\right| = 0$, ce qui nous ramène au cas des limites de fonctions réelles.

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable.

✌ ✌ ✌ **Explication** Cette définition est exactement la même que dans le cas des fonctions réelles. La seule chose qui a changé, c'est l'allure des voisinages. Pour un rappel, consultez les dernières pages du chapitre « Limite d'une suite ».

Théorème (Caractérisation de la limite à partir des parties réelle et imaginaire) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_a f = \ell$. (ii) $\lim\limits_a \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_a \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\ell)$.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons qu'on ait $\lim\limits_a f = \ell$. Montrons que $\lim\limits_a \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(\ell)$ — pour la partie imaginaire, remplacer « Re » par « Im ». On a : $\left|\mathrm{Re}(f) - \mathrm{Re}(\ell)\right| = \left|\mathrm{Re}(f - \ell)\right| \leqslant |f - \ell|$. On conclut avec le théorème des gendarmes.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Supposons qu'on ait $\lim\limits_a \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_a \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\ell)$. Alors par définition du module, et étant données les opérations qu'on peut faire sur les limites, on a $\lim\limits_a |f - \ell| = 0$. Ceci signifie précisément que $\lim\limits_a f = \ell$. ■

Exemple $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{ix}}{1 + x^2} = 0$ car $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{1 + x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{1 + x^2} = 0$.

Avec les fonctions complexes, il est toujours vrai qu'une fonction possédant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point.

Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, pourraient être définies sans changement dans le cadre des fonctions complexes. De même pour la notion de limite en un point en lequel la fonction étudiée n'est pas définie.

La caractérisation séquentielle de la limite est maintenue. De même les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse sur les limites donnent lieu aux mêmes résultats que dans le cas réel ; plus précisément, dans une expression de la forme « $\lim\limits_a f = \ell$ » où f est une fonction complexe, on peut avoir $a = \pm\infty$, mais pas $\ell = \pm\infty$ car ℓ doit être un nombre complexe.

Les grands théorèmes d'existence de limites n'ont pas de sens dans le cas des fonctions complexes car ils utilisent de façon essentielle la relation d'ordre naturelle $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.